

动载下的圆柱齿轮接触应力分析*

西北工业大学
航空航天部 608 所

刘 更** 朱 浩 沈允文
高向群

【摘要】 本文研究了一般三维弹性接触问题的有限元局部网格密化技术,并在此基础上结合有限元—线性规划法首次提出了一种计算直齿和斜齿圆柱齿轮啮合过程接触应力分布的方法。文中以一对航空斜齿圆柱齿轮为例,计算了在系统动载和静载作用下该对斜齿轮不同接触线上的接触应力,并与航标进行了对比分析。计算结果表明本文方法及其微机用程序系统是快速可靠的。

关键词: 圆柱齿轮 接触应力 局部网格密化

1 前 言

无论在航空航天领域还是在一般机械传动,尤其是重型机械传动中,齿轮齿面点蚀破坏一直是圆柱齿轮传动的主要失效形式之一。运用有限元法进行圆柱齿轮三维接触应力分析已有一些报道^[1~2],但仅仅是针对某一特定接触线进行研究的。由于受计算机内存及计算时间的限制,其有限元网格常常只能在接触线局部接触区域划分得很密,而使得轮齿其他部分的网格划分过于稀疏。这就容易造成圆柱齿轮接触应力计算模型与原轮齿几何形状相差较大的弊端。因此,研究出计算圆柱齿轮在啮合过程中的接触应力变化的方法,对全面分析齿轮齿面失效原因是具有很重要意义的。有限元局部网格密化是详细研究应力集中区应力分布的一种非常有效的方法。但接触区域局部密化模型的应力计算比较复杂,它既涉及局部位移边界条件,也涉及小变形几何非线性的迭代计算。因此关于接触区域局部密化模型的应力计算方法几乎未见有公开报道。

本文首先研究了弹性接触问题中接触区域局部密化模型接触应力计算技术,并由此提出了一套计算圆柱齿轮副啮合过程接触应力的方法和模块式计算程序系统。文中以一对航空斜齿圆柱齿轮为例进行了说明。

2 局部密化模型接触应力的计算方法

本文计算弹性接触应力采用的是有限元—线性规划法^[1,3]。迭代计算可能接触点载荷分布时,是在约束方程(1)和接触条件(2)下求目标函数(3)的最小值。

$$\left. \begin{aligned} -[L]\{F\} + \alpha\{e\} + [I]\{Y\} + [I]\{Z\} &= \{e\} \\ \{e\}^T\{F\} + Z_{n+1} &= P \\ F_k &\geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad Y_k \geq 0, \quad \epsilon_k \geq 0, \quad Z_k \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\text{若 } Y_k > 0, \text{ 则 } F_k = 0 \text{ (未接触)}; \quad \text{若 } Y_k = 0, \text{ 则 } F_k \geq 0 \text{ (已接触)} \quad (2)$$

$$Z_o = \sum_{j=1}^{n+1} Z_j \quad (3)$$

式(1)~(3)中, 矩阵 $[L]$ 是由有限元求出的两接触体可能接触点柔度阵之和; α 是弹性接触体间的刚体位移; $\{Y\}$ 是松弛变量; $Z_i (i=0, 1, \dots, n+1)$ 是人工变量; $\{\epsilon\}$ 是可能接触点对间的初始间隙; $\{F\}$ 是可能接触点的载荷向量; P 是所施加的总载荷。

由上三式可以看出, 用有限元—线性规划法求解接触载荷 $\{F\}$ 的关键在于计算两接触体可能接触结点的柔度矩阵 $[L]$ 。

用有限元—线性规划法求弹性接触问题时, 需要对计算模型进行两次有限元计算。第 1 次是对可能接触点依次施加单位力形成接触结点柔度矩阵 $[L]$ 。第 2 次在用线性规划法(式(1)~(3))求出接触载荷分布后, 加载计算接触应力分布。在完整结构接触问题计算中, 通常位移边界条件为零位移边界, 它不随外部施加载荷的大小变化。在这种情况下, 两次有限元计算其位移边界条件是不变的。但是, 由于完整结构的位移场将随着外载而改变, 所以在局部密化模型接触应力计算中, 其与完整结构结合边界上的位移(即局部密化模型位移边界)也将改变。

2.1 接触结点柔度阵计算的位移边界条件

为叙述方便, 先以二维问题为例。假设接触中的两个物体 Ω_1 和 Ω_2 (如图 1(a)所示), 其初始接触结点为 p 。应用有限元方程

$$[K]_i \{u\}_i = \{F\}_i \quad (4)$$

可以分别计算出当初始接触点 p 作用一单位力时, 两物体中的位移场 $\{u\}_1$ 和 $\{u\}_2$ 。当从 Ω_1 和 Ω_2 中的接触域附近分别取出一小区域 Ω'_1 和 Ω'_2 (如图 1(b)所示)时, 局部区域 Ω'_1 和 Ω'_2 在单位力作用下的位移边界 $\{\Gamma\}_1$ 和 $\{\Gamma\}_2$ 可以分别从 $\{u\}_1$ 和 $\{u\}_2$ 中获得。然后对 Ω'_1 和 Ω'_2 进行局部网格密化, 计算局部密化模型可能接触结点的柔度矩阵。为了节省计算时间, 我们将可能接触结点的柔度系数放在一个方程

$$[K]_{n \times n} [\lambda]_{n \times m} = [F]_{n \times m} \quad (5)$$

中计算。式中 n 为局部密化模型的自由度数; m 为可能接触结点数; $[K]_{n \times n}$ 是局部密化模型的刚度矩阵; $[F]_{n \times m}$ 的第 j 列 $\{F_j\} (j=1, 2, \dots, m)$ 中的元素, 在第 j 个可能接触结点法向自由度上为 1, 其余元素为 0; $[\lambda]_{n \times m}$ 中的给定位移自由度上的值分别为 $\{\Gamma\}_1$ 和 $\{\Gamma\}_2$ 。由此可以根据拟子结构波前法程序^[1]快速有效地求出局部密化模型的柔度矩阵。在这里, 我们将二维问题中实际为接触分布载荷的问题在求解边界条件时静力等效为一点接触。根据弹性力学中的圣维南原理^[4], 这种静力等效是可以接受的。

在圆柱齿轮、滑动轴承、轧辊等三维接触问题中, 设完整结构沿纵向划分为 k 个截面, 在每个截面上都有一个初始接触结点。利用式(5)可求出任一截面 i 初始接触结点施加一单位力时完整结构的位移场, 由此得到局部密化模型柔度阵计算的一个位移边界 $\{\Gamma\}_1^i$ 和 $\{\Gamma\}_2^i$ 。如每个截面仍有 m 个可能接触结点, 则三维局部密化模型的接触结点柔度阵计算将由式(5)变为

$$[K]_{n \times n} [\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k]_{n \times (m \times k)} = [F]_{n \times (m \times k)} \quad (6)$$

式中子矩阵 $[\lambda]_{n \times m}$ 中的给定位移边界为 $\{\Gamma\}_i^j$, 矩阵 $[F]_{n \times (m \times k)}$ 中元素的组成与式(5)中的矩阵 $[F]_{n \times m}$ 类似。

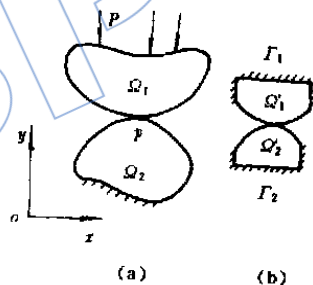


图 1 处于接触中的两物体

2.2 接触应力计算的位移边界条件

根据式(6)中计算出可能接触结点的柔度矩阵 $[L]$ 和接触体承受的载荷 P ,可以由式(1)~(3)求出局部密化模型的接触载荷分布 $\{F\}$ 。由于计算接触结点柔度系数和计算接触应力时,局部密化模型所承受的载荷大小是不一样的,所以其局部密化模型给定位移边界的位移值也不相同。在线弹性小变形范围内,其接触应力计算时的位移边界条件可以由线性叠加原理来获得。在三维接触问题中,其位移边界

$$\{\Gamma\} = \sum_{i=1}^k P_i \{\Gamma\}^i \tag{7}$$

式中, P_i 为第 i 个截面 m 个接触结点载荷之和。由接触分布载荷 $\{F\}$ 和位移边界 $\{\Gamma\}$,即可用有限元程序计算局部密化区的接触应力分布。

上述计算方法及程序的正确性已用圆柱体接触问题的有限元解与解析解对比所证实。

3 圆柱齿轮啮合过程接触应力计算、计算实例

当知道一对齿轮副的基本几何参数和小齿轮旋向后,根据齿轮啮合原理可以方便地确定齿轮啮合过程各接触线在啮合面上的位置。图2所示为本文计算实例斜齿轮啮合面上的各接触线,它包括了5个啮合位置共14条接触线。由此根据斜齿轮三维有限元网格自动生成程序^[5]完成斜齿轮副有限元模型的建立。然后根据文献[6]中的方法即可一次求出齿轮副的齿面柔度阵、各接触线齿向载荷分布与齿间载荷分配等。这也就一次求出了所有初始接触结点的位移边界,为用局部密化模型计算各接触线的详细接触应力节省了大量机时。

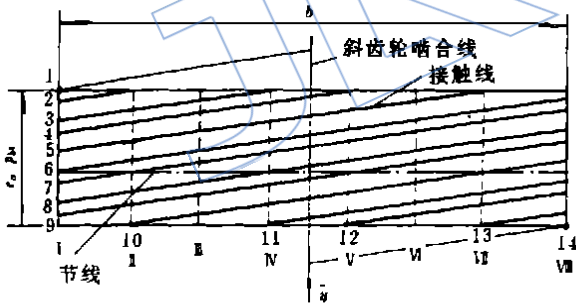


图2 斜齿轮的啮合面

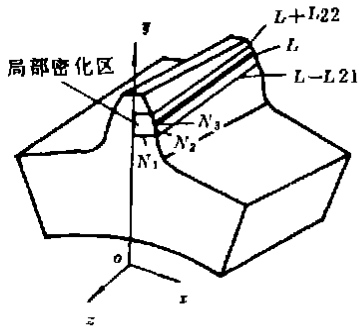


图3 接触线局部区域的选取

所求接触线局部区域的大小是根据需要从相邻两边第 $L-L21$ 条接触线到第 $L+L22$ 条接触线之间选取的(如图3所示)。其中 L 为所要计算接触应力的接触线号, $L21$ 和 $L22$ 分别表示取 L 上下第几条接触线作为其几何边界。局部区域接触结点柔度阵和接触应力计算边界条件根据已求出齿轮中的位移场按上节所述方法嵌入。

由上述过程,我们可以计算齿轮啮合过程各接触线上的接触应力。接触线局部密化区域有限元网格的疏密程度由控制变量 N_1 、 N_2 和 N_3 (见图3)来确定。局部密化区域中的接触半带宽 b 由该接触线所承担的载荷 P 、接触线长 L_c 、第 L 条接触线前端面两齿轮的综合曲率半径 ρ_1 与 ρ_2 自动调节,以避免设置的带宽不合适而造成重复计算。

根据以上方法编制了微机用通用化模块程序系统并用来分析了某航空发动机星型传动系统中一对斜齿圆柱齿轮啮合过程接触应力分布。齿轮副主要几何参数为: 齿数 $Z_1 = 25$, $Z_2 = 96$; 模数 $m_n = 1.38\text{mm}$; 分度圆螺旋角 $\beta = 8^\circ 55' 26''$; 齿宽 $B = 25\text{mm}$; 变位系数 $x_1 = 0.35$, $x_2 = -0.35$ 。齿轮输入轴转速 $n = 41781\text{rpm}$, 扭矩 $T = 110\text{N} \cdot \text{m}$ 。齿轮材质性能为弹性模量 210GPa , 泊松比 0.3 。齿轮啮合过程各接触线如图 2 所示。每个齿轮沿齿宽方向有 8 个截面, 划分了 238 个单元, 424 个结点共 1272 个自由度。各接触线局部区域加密网格上下几何边界视, 上、下接触线距所求接触线的距离, 而调整确定。

由系统动载与静载求出的该对齿轮啮合过程各接触线上承担的载荷如图 4 所示, 图 4 中 $\bar{y}$ 轴见图 2 所示。从图 4 中可见, 当静载作用时, 其载荷分配近似为一抛物线分布, 而当动载作用时, 载荷分配出现了两个高峰, 其中一个高峰刚好出现在节线附近。

考虑到齿面点蚀主要分布在齿轮节线附近, 我们主要计算了该对齿轮副第 5~11 共 7 条接触线上的接触应力。对应齿轮的 8 个截面, 这 7 条接触线在动载作用下的最大接触应力分布如图 5 所示。从图 5 中可以看出, 各条接触线的最大接触应力在各个截面上并不相同, 其中第 10 条接触线在截面 V 处的接触应力最大。对照图 2 可以看出, 第 10 条接触线为小齿轮单对齿啮合区, 其截面 V 处于节线以下并靠近节线位置, 这与航标以小齿轮单对齿啮合区小界点的接触应力作为计算接触应力的基准是符合的, 也与实际齿轮点蚀常常发生的位置是吻合的。

在静载和动载作用下, 该对齿轮副啮合过程接触应力在节线上的分布如图 6 所示, 图 6 中还给出了由航标求出的节点计算应力。由图 6 可见, 由于本文这对齿轮传动属于中心浮动传动, 所以其节线上的最大接触应力均在轮齿的中部附近。对照图 4 可以发现, 虽然两种载荷在节线上相差约 22.2%, 但节线上两种载荷作用下的最大接触应力仅相差 12.7%, 表明接触应力并不随外载线性变化。从图 6 还可见, 航标求出的节点接触应力 (即不考虑单对齿啮合系数 Z_B) 分别是动载和静载下节线上最大接触应力的 1.19 和 1.36 倍, 表明航标计算趋于保守。

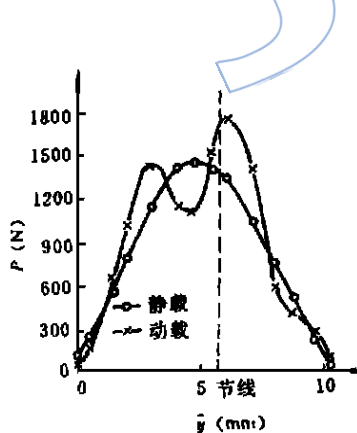


图 4 齿轮啮合过程各接触线上的载荷

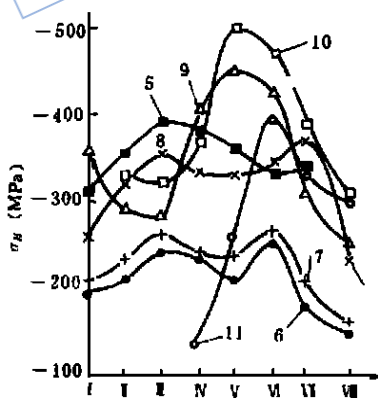


图 5 各接触线上的最大接触应力分布

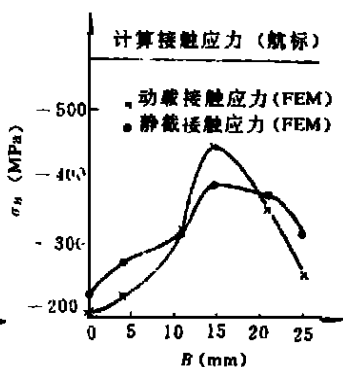


图 6 静载与动载下接触应力沿节线的分布

对比图 5 和图 6 还可以发现, 动载作用下节线上的最大接触应力与节线下小齿轮单对齿

啮合区的最大接触应力之比为 1.09, 比由航标计算出的单对齿啮合系数 $Z_B = 0.9905$ 要大。

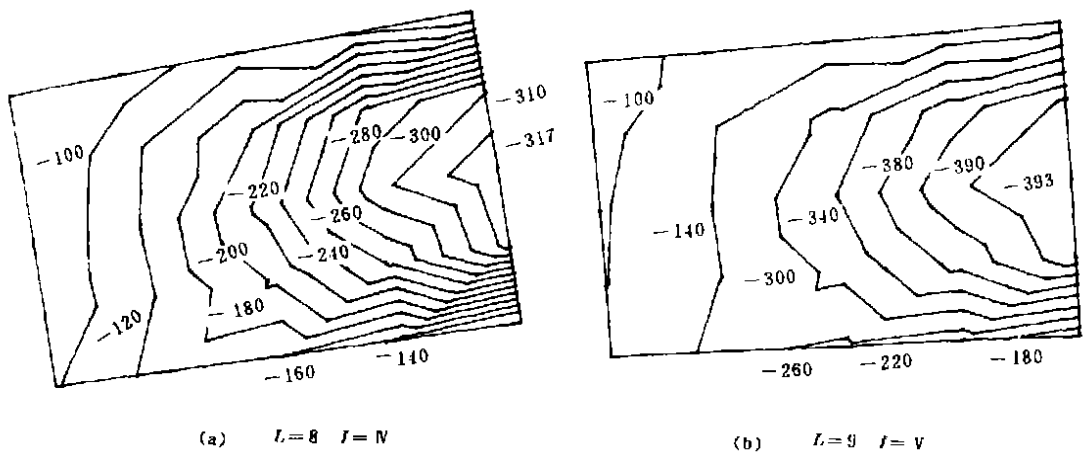


图7 接触线过节点截面内 σ_3 等应力线图(L —接触线号, I —截面数)

图7给出了两条接触线在静载作用下过节线截面的最小主应力 σ_3 等应力线图。从图7中可见, 由于齿面渐开线各点曲率半径不同, 所以其接触域内的最小主应力并不呈对称分布。

4 结论与讨论

本文方法与模块化程序为设计高承载能力的圆柱齿轮传动提供了一个有力的工具。在此基础上将能方便地进一步考虑摩擦、润滑等对接触应力的影响。本文主要结论为: (1) 在用接触区域局部密化模型研究接触应力时, 其计算柔度阵与接触应力的位移边界条件是不同的。柔度阵计算中各截面可能接触点柔度系数计算位移边界条件也不一样。(2) 动载下齿轮副最大接触应力并不在节线上, 而是发生在小齿轮单齿啮合区下界点靠近节线处。这与齿轮实际发生点蚀破坏的位置很吻合。节线下小齿轮单齿啮合区下界点位置的最大接触应力是节线上最大接触应力的 1.09 倍。但航标求出的单对齿啮合系数 $Z_B = 0.9905$, 表明航标得到的节线上计算接触应力比小齿轮单齿啮合区下界点处的接触应力还要略大一些。这与本文动载下的计算结果相反。(3) 航标求得的节点处计算接触应力分别是静载与动载下齿轮节线上最大接触应力的 1.36 和 1.19 倍, 表明航标计算结果趋于保守。

参 考 文 献

- 1 刘更, 纪名刚. 斜齿圆柱齿轮的三维接触应力分析. 齿轮, 1987, 11(4): 8- 13
- 2 Caracci G, et al. Study of Contact Pressure within a Gear Using Optimization Methodology. Proc. Inter Gear 88, Zhengzhou, China, 1988, 771- 774
- 3 Conry T F, Seireg A. Mathematical Programming Technique for the Evaluation of Load Distribution and Optimal Modifications for Gear Systems. ASME J. Eng. Ind., 1973, 94: 1115- 1122
- 4 Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of Elasticity. New York, Mc Graw Hill, 1970
- 5 刘更, 沈允文. 内外啮合斜齿轮三维有限元网格自动生成原理及其程序实现. 机械工程学报, 1992, 28(5): 20- 25
- 6 刘更. 一种确定内外啮合斜齿轮圆柱齿轮载荷分布的有效方法. 机械工程学报, 1991, 27(3): 20- 26

VIBRATION CHARACTERISTICS OF MISTUNED DISK-BLADED

Yan Yunju and Gu Jialiu

(*Northwestern Polytechnical University*)

ABSTRACT

A mathematical model by Substructure Mode Synthesis Method is provided for coupling vibration of a mistuned disk-bladed. Several low order modes of each substructure are obtained by means of Experimental Modal Analysis and modifying calculation of the modes. Relying on the small perturbation of blade modal stiffness, real mistuned disk-bladed and several kinds of theoretical mistuned models are set up. Model parameters and mathematical formulas are checked by use of forced vibration experiment of a real mistuned disk-bladed on vibrostand. Analytical results well reveal that the mistuning of blades is the reason why resonant response of some blade on the same stage disk is much greater than other blades. The results also show that smaller frequency difference and random mistuning distribution of blades are eligible, and also give the rational range of rotating frequencies of an engine.

PRECISE TRANSFER MATRIX FORMULAE CONSIDERING AXIAL FORCES

Li Yan

(*Nanhua Power Plant mechanical Research Institute*)

ABSTRACT

Two precise transfer matrix formulae of different forms for analysis of shaft element with constant section parameters are derived which take axial forces and shearing deformation into account. Both of the formulae are applied to a practical example. The comparison between the results of the calculation and experimental data shows that the precision of the formulae is very well and that considerable axial forces do have a nonnegligible influence on dynamic properties of rotor-bases system. The presented formulae not only extend the application of the transfer matrix method, but also provide a convenient approach to solving the specific engineering problems in dynamic analysis of the rotor-bases system with considerable axial forces due to pre-pressed coupling curves in its assemblage.

STUDY ON CONTACT STRESSES OF CYLINDRICAL GEARS ACTED BY DYNAMIC LOADS

Liu Geng, Zhu Hao, Shen Yunwen (*Northwestern Polytechnical University*)

Gao Xiangqun (*Nanhua Powerplant Institute*)

ABSTRACT

An approach to local finite element mesh refinement is studied for three-dimensional elastic contact problems. The study shows that because of different acting loads the boundary conditions of the refinement model in contact problems are different in calculation at flexible matrices and contact stresses. On the basis of the approach, an effective method is provided for the calculation of the contact stresses of spur and helical gears during the whole engagement period. According to the position of contact lines in the action plane, the present method establishes the FE models of gears by a 3-D automatic mesh generation program. The load share ratios of gears and load distributions along the contact lines during the whole engagement period are then simultaneously calculated by using the coordinate systems of gear profile and the corresponding matrices of coordinate transformation. Furthermore, the local FE mesh refinement models of gears on a specific contact line are established and the detailed contact stress distributions of the contact line are evaluated with the use of finite element-mathematical programming technique. In this case, the calculations of contact stresses on different contact lines of gears during the whole engagement period can

be conveniently carried out. The contact stresses on different contact lines of a pair of aeronautical helical gears acted by dynamic and static loads of the gear system are calculated. The calculated results show, the present method and the corresponding microcomputer programs are fast and reliable in calculation as compared with those by Aeronautical Standard of China HB/Z84, 2-84.

A TRANSIENT BURNING MODEL OF SOLID PROPELLANTS AND ITS APPLICATION TO LIQUID QUENCH OF ROCKET MOTOR

Yin Jinqi, Wang Kexiu, Wu Xinping

(Northwestern Polytechnical University)

ABSTRACT

A transient burning model of solid propellants is proposed, in which the distributed reactions and deep absorption of external radiation are considered in the condensed phase. The heat loss due to boiling heat transfer induced by liquid jet impinged on burning surface is taken into consideration in the energy balance equation on the burning surface. A space-wise thick flame model is developed to obtain the flame heat feedback under the conditions that the decreasing of chamber pressure and gas-phase temperatures is caused by liquid injection and evaporation of liquid drops in gas phase, which is described by a submodel for internal ballistics of rocket motor during liquid quench. The model can be used to describe the transient burning behaviors of solid propellants under the influence of external disturbances, such as rapid depressurization, deradiation or liquid injection, and to obtain the critical values required for extinction of solid propellants. The results from theoretical prediction indicate that whether the transient burning comes into extinction is not only dependent on the variation rate of the external disturbance, but also on the variation amplitude of the disturbance. The critical values of liquid injection pressure drops for extinction of two kinds of aluminized ammonium perchlorate-hydroxyterminated polybutadiene propellants (16%Al and 18.5%Al) were obtained by experiments. The predicted results obtained from the transient burning model are in good agreement with the experimental data. The critical value of liquid injection pressure drop increases with increasing propellant energy and chamber pressure.

DETERMINATION OF LIQUID QUANTITY REQUIRED FOR LIQUID QUENCH OF SOLID ROCKET MOTOR

Yin Jinqi, Wang Kexiu, Wu Xinping

(Northwestern Polytechnical University)

ABSTRACT

The liquid quantity required (LQR) for liquid quench of solid rocket motor was determined with the use of a theoretical model developed by the authors. LQR increases with propellant energy and decreases as the evaporation heat of liquid and the liquid pressure drop (the difference between injection pressure of liquid and chamber pressure) increase. The effects of the chamber pressure and burning rate pressure exponent of propellant on LQR merge into the effect of mass burning rate of propellant. Then LQR increases with increasing mass burning rate. The theoretical results are in good agreement with experimental data.